Funkcje Analityczne – egzamin termin zerowy

26.01.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)}.$$

Rozwiązanie:

To jest raczej standardowa całka. Stosujemy podstawienie $z = \exp(i\theta)$, wówczas $\cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ oraz $d\theta = -i\frac{dz}{z}$. Po podstawieniu otrzymujemy całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)} = -2i \int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

Zadanie 2. (10p.)

Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $P(z) = z^8 - 13z^5 + 7$ w:

(a) pierścieniu $1 < |z| < 3$;

(b) półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Zadanie 3. (10p.)

(a) Pokaż, że homografia postaci

$$h(z) = \frac{z+b}{z+d}$$

przekształca dysk jednostkowy $D := D(0,1)$ na obszar $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) < 0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = -d$ oraz $|b| = 1$.

(b) Dla dowolnie wybranych punktów $p \in D$, $q \in D \setminus \{0\}$, pokaż, że istnieje holomorficzna suriekcja

$$f \colon D \to D \setminus \{0\}$$

taka, że $f(p) = q$.

Rozwiązanie:

(a) Pokażemy najpierw, że każda homografia $h(z) = \frac{z+b}{z+d}$, gdzie $|b| = 1$ oraz $b = -d$, przekształca dysk jednostkowy $\partial D(0,1)$ na półpłaszczyznę $\mathbb{H}_-$. Niech $z \in D(0,1)$, czyli $|z| < 1$. Mamy

$$h(z) = \frac{z+b}{z-b} = \frac{(z+b)(\overline{z}-\overline{b})}{|z-b|^2} = \frac{|z|^2 + b\overline{z} - \overline{b}z - |b|^2}{|z-b|^2} = \frac{|z|^2 - 1 + 2i\,\mathrm{Im}(\overline{b}z)}{|z-b|^2}.$$

Stąd,

$$\mathrm{Re}(h(z)) = |z|^2 - 1 < 0.$$

Zatem $h(D(0,1)) = \mathbb{H}_-$.

Załóżmy teraz, że homografia $h(z) = \frac{z+b}{z+d}$ przekształca dysk jednostkowy $D(0,1)$ na półpłaszczyznę $\mathbb{H}_-$. Zauważmy, że szukana homografia h przekształca okrąg jednostkowy $\partial D(0,1)$ na prostą $L = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Zauważmy, że $h(-b) = 0$, zatem $-b \in \partial D(0,1)$, stąd $|b| = 1$. Z drugiej strony, $h(\infty) = 1$. Zauważmy, że punkty 0 i ∞ są symetryczne względem okręgu jednostkowego $\partial D(0,1)$ (tzn. punkt ∞ jest obrazem 0 przez inwersję względem okręgu jednostkowego). Zatem punkty $h(0)$ i $h(\infty)$ są symetryczne względem $h(\partial D(0,1) = L$, Skoro $h(\infty) = 1$, to oznacza, że $h(0) = -1$. Stąd otrzymujemy, że

$$-1 = h(0) = \frac{b}{d},$$

zatem $b = -d$. Podsumowując, pokazaliśmy, że jeśli homografia $h(z) = \frac{z+b}{z+d}$ przekształca dysk $D(0,1)$ na półpłaszczyznę $\mathbb{H}_-$, to $|b| = 1$ oraz $b = -d$, co kończy dowód.

Zadanie 4. (10p.)

Niech $Q \subset \mathbb{C}$ oznacza domknięty czworokąt (razem z wnętrzem) o wierzchołkach ± 1, $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ oraz niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus Q$. Rozważmy następującą funkcję na obszarze Ω

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}.$$

(a) Niech γ będzie okręgiem o środku 0 i promieniu 2 ze standardową orientacją. Wyznacz wartość całki

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

(b) Czy na zbiorze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log f(z)$? Innymi słowy, czy na Ω istnieje funkcja holomorficzna g taka, że $\exp(g) = f$?

Zadanie 5. (10p.)

Załóżmy, że funkcja $F(z)$ jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$, która ma pojedyncze bieguny w punktach $z \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ oraz spełnia:

1. $F(z+1) = zF(z)$, dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$,
2. $F(1) = 1$

Wyznacz $\mathrm{Res}(f,k)$, dla $k \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

Zadanie 6. (10p.)

Załóżmy, że f jest holomorficzna na $D(0,1)$ oraz spełnia $f(0) = 0$, $\mathrm{Re}\, f(z) < 1$. Pokaż, że spełnione są następujące nierówności:

$$|f(z)| \leqslant \frac{2|z|}{1-|z|}, \quad |f'(0)| \leqslant 2.$$